Αn 1. No. Date 22/11/2017

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$$

Θέτω $\psi(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ $\qquad 0 < |x-2| < \delta$

$$\left|\psi(x) - \frac{4}{5}\right| = \frac{|5x^3-4x^2-24|}{5(x^2+1)} = \frac{|5x^2+6x+12|}{5(x^2+1)} \cdot |x-2|$$

$5x^3-4x^2-24=0$ $\quad x=2$ ρίζα

Θέτω $y=x-2 \Leftrightarrow x=y+2$

$y(ay^2+by+\gamma)=0$

Εαν $x \in (1,3)$

$|5x^2+6x+12| = 5x^2+6x+12 < 5\cdot 3^2+6\cdot 3+12 = 75$

$5(x^2+1) > 5(1+1) = 10$

$\rightsquigarrow \left|\psi(x)-\frac{4}{5}\right| < \frac{75}{10}|x-2| \;\; \forall x \in (1,3) \;\; (1)$

$\frac{75}{10} = 15/2$

Εστω $\epsilon > 0$

Διαλέγω $\delta = \min\{1, \frac{2}{15}\cdot\epsilon\}$

Τότε εαν $0 < |x-2| < \delta$

$\overset{(1)}{\rightsquigarrow} \left|\psi(x)-\frac{4}{5}\right| < \frac{15}{2}\delta \leq \frac{15}{2}\cdot\frac{2}{15}\epsilon = \epsilon$

Ακολουθιακό κριτήριο για όρια

Θεώρημα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και έστω c σ.σ. του A. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) $\lim_{x\to c} f = L$

ii) $\forall$ ακολουθία $(x_n) \in A$ με $x_n \to c$ και $x_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $f(x_n) \to L$

No. Date

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) Υποθέτω ότι η f έχει όριο το L στο c (1)

Έστω (x_n) ακολουθία με $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to c$ και $x_n \neq c$ $n \in \mathbb{N}$ (2)

Θ.δ.ο. $f(x_n) \to L$. Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$

Από (1): $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A$ με $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Από (2): $\exists\, n_0$ τέτοιο ώστε $0 < |x_n - c| < \delta$ $\forall n \geq n_0$ (με $x_n \in A$)
≥ 0

Άρα $|f(x) - L| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$ δηλαδή $f(x_n) \to L$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Θ.δ.ο. $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. αν $0 < |x - c| < \delta$, $x \in A$
$\rightsquigarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Με άτοπο

$\exists\, \epsilon_0 > 0$ τ.ω. $\forall \delta > 0$ $\exists\, y_\delta \in A$ με $|y_\delta - c| < \delta$ τ.ω. $|f(y_\delta) - L| > \epsilon_0$

Παίρνω $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και βλέπω ότι

$0 < |y_{\frac{1}{n}} - c| < \frac{1}{n}$ και $y \in A$ ενώ $|f(y_{1/n}) - L| \geq \epsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Επομένως η ακολουθία $(x_n) = (y_{1/n}) \in A \setminus \{c\}$ συγκλίνει στο c όμως η ακολουθία $f(y_n)$ δεν συγκλίνει στο L

άτοπο.

Κριτήρια Απόκλισης: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A

(a) Εάν $L \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν έχει όριο το L στο c
$\Leftrightarrow \exists$ ακολουθία $(x_n) \in A$ με $x_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_n \to c$ αλλά

No. Date

n $(f(x_n))$ δε συγκλίνει στο L.

(6) Η f δεν έχει όριο στο c $\Leftrightarrow$ $\exists$ ακολουθία $(x_n) \in A$ με $x_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n \to c$ αλλά η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει

Π.χ. α) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$, δηλ. δεν είναι κάποιος αριθμός)

Θέτω $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \in A$ $\quad x_n \neq 0$ $\quad x_n \to 0$

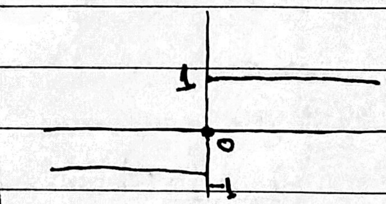
$f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ δε συγκλίνει η $(f(x_n))$

από το Πρόσημο

b) $\lim_{x \to 0} sgn(x)$ δεν υπάρχει

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 & αν\ x > 0 \\ 0 & αν\ x = 0 \\ -1 & αν\ x < 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση: $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ για $x \neq 0$



Έστω $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n \neq 0$, $\quad x_n \to 0$

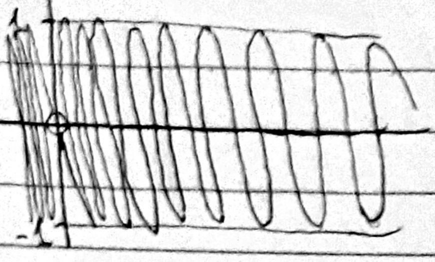
$f(x_n) = sign(x_n) = (-1)^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει

Άρα δεν υπάρχει το όριο

c) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$)

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, παρατηρώ $c = 0$ σ.σ. του A.

No. Date



$f(x_n)=0$ $\quad x_n, y_n \to 0$

$f(y_n)=k$ $\quad x_n, y_n \neq 0$.

Υπενθύμιση: $\sin t = 0$ αν $t = n\pi$ $\quad n\in\mathbb{Z}$

$\sin t = 1$ αν $t = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ $\quad n\in\mathbb{Z}$

Θέτουμε $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $n\in\mathbb{N}$, τότε $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$ και $f(x_n)=0$

$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ $n\in\mathbb{N}$ » $y_n\to 0$, $y_n\neq 0$ και $f(y_n)=1$

Θεωρήματα ορίων

Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, και $c\in\mathbb{R}$ σ.σ. του A. Λέμε ότι η f είναι φραγμένη σε μια γειτονιά του c εάν υπάρχει $\delta>0$ και $M>0$ τ.ω. $|f(x)|\leq M$ αν $|x-c|<\delta$ με $x\in A$

Θεώρημα: Εάν $A\subseteq\mathbb{R}$ και $f: A\to\mathbb{R}$ έχει όριο $c\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι φραγμένη σε μια γειτονιά του c

Απόδειξη

Έστω $L=\lim_{x\to c} f$ ($L\in\mathbb{R}$ εννοείται). Τότε για $\epsilon=1$, $\exists\delta>0$ τ.ω. $0<|x-c|<\delta$ και $x\in A \Rightarrow |f(x)-L|<1 \rightsquigarrow |f(x)|<|L|+1$ αν $0<|x-c|<\delta$, $x\in A$

Εάν $c\notin A \rightsquigarrow |f(x)|<|L|+1$ αν $|x-c|<\delta$ με $x\in A$

Αν $c\in A$ θέτω $M=\max\{|f(c)|, |L|+1\} \rightsquigarrow |f(x)|<M$

Θεώρημα: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $f,g: A\to\mathbb{R}$ και c σ.σ. του A. Επιπλέον, έστω $b\in\mathbb{R}$ σταθερά.

α) Εάν $\lim_{x\to c} f=L$ και $\lim_{x\to c} g=M$, τότε $\lim_{x\to c}(f+g)=L+M$, $\lim_{x\to c}(f-g)=L-M$ $\lim_{x\to c}(f\cdot g)=L\cdot M$ $\lim_{x\to c}(bf)=b\cdot L$

No. Date

b) Εαν $h: A \to \mathbb{R}$ με $h(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ και $\lim_{x\to c} h = H \neq 0$, Τότε $\lim_{x\to c} (f/h) = \frac{L}{H}$

Απόδειξη Θ.δ.ο. $\lim_{x\to c}(f \cdot g) = L \cdot M$.

Εστω $x_n \to c$ με $x_n \in A$ $x_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ξέρω $f(x_n) \to L$ $g(x_n) \to M$

Άρα $(fg)(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n) \longrightarrow L \cdot M$.

Τα υπόλοιπα ομοίως

Παρατηρώ: Αν $f_1, f_2, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ c σ.σ. του A.

Εαν $L_k = \lim_{x\to c} f_k$ $k = 1, \ldots, m$

Τότε: $\lim_{x\to c} (f_1 + f_2 + \ldots + f_m) = L_1 + \ldots + L_m$

$\lim_{x\to c} f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_m = L_1 L_2 \ldots L_m$

Παραδείγματα: • $\lim_{x\to 2} (x^2+1)(x^3-4) = 20$

$\lim_{x\to 2} x = 2 \rightsquigarrow \lim_{x\to 2} x^2 = 4$

$\lim_{x\to 2} 1 = 1$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 2} (x^3-4) = 4$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 2} (x^3-4)(x^2+1) = 20$

• $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x-6}$ $f(x) = x^2-4$, $h(x) = 3x-6$ $A = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$h(x) \neq 0$ για $x \in A$ (κατα Θεο 2)

όμως $\lim_{x\to 2} h = 0$ Άρα δεν εφαρμόζω το Θεώρημα

Όμως για $x \in A = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ έχω

No Date

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{4}{3}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A.
Εάν $a \le f(x) \le b$ για $x \in A$, $x \ne c$, (1)
και εάν $\lim_{x\to c} f$ υπάρχει, τότε $a \le \lim_{x\to c} f \le b$

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $\lim_{x\to c} f = L$. Εάν (x_n) ακολουθία με $x_n \to c$, $x \in A$ και $x_n \ne c$

Τότε $f(x_n) \to L$
Όμως από (1) με $x = x_n \in A$ $(x_n \ne c)$
$a \le f(x_n) \le b$ $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a \le L \le b$ (από ενότητα όρια ακολουθιών και διάταξης)

<u>Θεώρημα Παρεμβολής</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, h: A \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A
Εάν $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in A$ με $x \ne c$, και εάν $\lim_{x\to c} f = L$
$\lim_{x\to c} h = L$, τότε $\lim_{x\to c} g = L$.

<u>Απόδειξη</u> (Άσκηση για το σπίτι)

<u>Παραδείγματα</u>: $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει

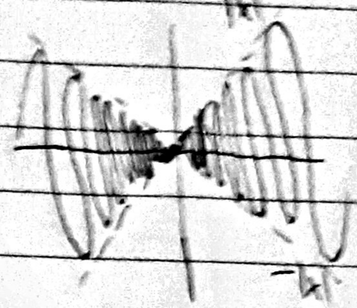
ν.δ.ο. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

No. Date

$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $\quad x \in A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$ $\quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad \lim_{x\to 0}|x| = 0$

0



Ασκήσεις Για το Σπίτι

① Ν.Δ.Ο. $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει (+ γραφική παράσταση)
αλλά $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

② Βρείτε $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$ όπου $x>0$

③ Να εξετάσετε αν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$): (i) $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$

(ii) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x\neq 0$. (+ γραφικές παραστάσεις)

(iv) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x>0$

(v) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ $\quad x\neq 0$